

問題8 物理数学 (100点)

以下の問い (問1～問6) に答えよ。解答用紙には計算の途中経過も書くこと。

問1 複素数の三角関数でも、正弦・余弦の加法定理が成り立つことを証明せよ。

問2 ベクトル演算子に関する以下の設問 (1), (2) に答えよ。ここで、 i, j, k は直交座標系における x, y, z 方向の単位ベクトルである。また、 A, B は定ベクトルで、 $A = A_x i + A_y j + A_z k$, $B = B_x i + B_y j + B_z k$ である。

(1) 次の式を証明せよ。ただし、 $r = xi + yj + zk$ である。

$$\text{rot}(A \times r) = 2A$$

(2) 次の式を証明せよ。ただし、 $r = xi + yj + zk$ である。

$$\text{rot}[(A \cdot r)B] = A \times B$$

問3 次の常微分方程式が完全微分形であることを示し、その一般解を求めよ。

$$\left(2x + \frac{1}{y}\right) dx + \left(2y - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0$$

問4 次の行列 A がユニタリ行列であることを示せ。ただし、 i は虚数単位である。

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & i\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -i\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

問5 次の行列 A の固有値と規格化した固有ベクトルを求めよ。ただし、 i は虚数単位である。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

問6 次の周期 2π の関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表せ。

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$$