

### 問題8 物理数学 (100点)

以下の問い(問1~問5)に答えよ。解答用紙には計算の途中経過も書くこと。

問1  $(-i)^{2i}$  を求めよ。ただし、 $i$ は虚数単位である。

問2 正則行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  について、設問(1)、設問(2)に答えよ。ただし、 $\alpha$ は正の実数の定数である。

- (1)  $A$ が正則行列であることから、 $\alpha$ が満たす条件を求めよ。
- (2)  $A$ の固有値と規格化した固有ベクトルを求めよ。

問3 常微分方程式  $\frac{dy}{dx} + x + y = 0$  を満たす  $y$ の一般解を求めよ。

問4 3次元直交座標系  $(x, y, z)$ において、ベクトル  $\mathbf{r} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$ と原点以外で定義したスカラー関数  $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + \alpha z^2$ について、設問(1)~(3)に答えよ。ただし、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は  $x, y, z$ 方向の単位ベクトルで、 $\alpha$ は0でない実数の定数である。

- (1)  $\phi$ について  $\mathbf{r}$ 方向への方向微分係数を求めよ。
- (2) 座標  $(\alpha, 1, -1)$ において  $\mathbf{r}$ 方向のベクトルが  $\phi = C$  (定数) で定義される曲面に接するとき、 $\alpha$ の値を求めよ。
- (3) 座標  $(\alpha, 1, -1)$ において  $\mathbf{r}$ 方向のベクトルが  $\phi = C$  (定数) で定義される曲面の法線ベクトルであるとき、 $\alpha$ の値を求めよ。

問5 以下のように定義される周期 $2\pi$ の関数  $f(x)$ と周期 $4\pi$ の関数  $g(x)$ を、それぞれフーリエ級数であらわせ。ただし、 $\alpha$ と $\beta$ はいずれも0でない実数の定数である。

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \alpha - \beta & (-2\pi < x < 0) \\ \alpha + \beta & (0 < x < 2\pi) \end{cases}$$