

問題7 力学 (100点)

以下の問い(問1~問3)に答えよ。

問1 二次元の直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係は、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

と表される。時間を t として、以下の設問(1)~(3)に答えよ。

- (1) 速度の極座標成分 v_r と v_θ を、速度の直交座標成分 $v_x (= dx/dt)$, $v_y (= dy/dt)$, および θ により表せ。
- (2) 質点が半径 r の半円周上を運動する ($0 < \theta < \pi$) とき、この質点の速度の x 成分 v_x が一定の値 v_0 であるとする。質点が θ の位置にあるとき、質点の速度の y 成分 v_y を求めよ。
- (3) 設問(2)のとき、速度の極座標成分 v_r と v_θ を求めよ。

問2 地球を質量が M , 半径 r_0 の球と考え、密度は球対称であるとする。質量 m の質点が、地球の中心から $r (\geq r_0)$ の距離にある。その質点に対する地球の万有引力による位置エネルギーは、無限に離れているときを基準にとると、 $U = -G \frac{Mm}{r}$ と表すことができる。ここで、 G は万有引力定数である。 $M \gg m$ であり、地球の自転にともなう効果は無視できるものとして、以下の設問(1)~(3)に答えよ。

- (1) 地表面 ($r = r_0$) における地球の万有引力による加速度の大きさ g を、 G , M , r_0 で表せ。
- (2) 地表から真上に向かって質量 m の質点を初速度 v_0 で投げ上げたとき、力学的エネルギー E の値を、 m , v_0 , g , r_0 で表せ。
- (3) 質点が高度 $z (= r - r_0 \geq 0)$ の位置にあるときの上向き速度を $v (\geq 0)$ としたとき、 v の値を、 v_0 , r_0 , g , z で表せ。

(次ページに続く)