

問題9 物理数学 (100点)

以下の問い(問1~問4)に答えよ。

問1 次の関数 $f(x)$ をフーリエ級数に展開せよ。

$$f(x) = |\sin x|$$

問2 対称行列に関する以下の設問(1)~(3)に答えよ。

(1) 次の対称行列 A について、固有値と長さ1の固有ベクトルを求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 上で求めた行列 A の固有ベクトルが互いに直交することを示せ。

(3) 設問(1), (2)の結果を用いて、行列 A を対角化せよ。

問3 次の常微分方程式の解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2, \quad y(0) = -3$$

問4 複素関数に関する以下の設問(1)~(3)に答えよ。

(1) 次の複素関数 $f(z)$ を $z=0$ においてテーラー展開せよ。

$$f(z) = e^z$$

(2) 次の複素積分 I_1 を求めよ。

$$I_1 = \int_C \frac{1}{z} dz$$

ただし、積分路 C は、単位円 $|z|=1$ を反時計回りに一周する経路とする。

(3) 設問(1), (2)の結果を用いて、以下の複素積分 I_2 を求めよ。

$$I_2 = \int_C \frac{e^z}{z^2} dz$$

ただし、積分路 C は上の(2)と同じである。