

(問題9の続き)

問2 行列に関する以下の問い(1)~(4)に答えよ。

- (1) 2行2列の行列を A とする。さらにその固有値を λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) とし、それぞれに付随する固有ベクトルを (x_1, y_1) と (x_2, y_2) とする。

$$P \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

と置くと、固有値と固有ベクトルの定義から

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

と書ける。ここから、

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

および

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

となることを示せ。ここで P^{-1} は P の逆行列、 n は正の整数、 A^n は行列 A の n 乗を示す。

- (2) 固有値が1と-1である2行2列の行列 B がある。この行列の n 乗 B^n を求めよ。さらにその逆行列 $(B^n)^{-1}$ を求めよ。 B^n と $(B^n)^{-1}$ の両方において、 n が偶数と奇数で答が異なるので、両者を区別して答を示せ。必要なら2つの正則な正方行列 B_1, B_2 の積の逆行列が

$$(B_1 B_2)^{-1} = B_2^{-1} B_1^{-1}$$

となることを使え。

- (3) 固有値が1と-1で、それぞれに付随する固有ベクトルが $(2, 1)$ と $(1, 1)$ である2行2列の行列 C を求めよ。
- (4) x と y を未知数とする次の連立方程式

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{21} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

を解け。ここで

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{21}$$

は行列

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

の21乗を表す。