

問題7 力学 (100点)

以下の問1～問3に答えよ。

問1 質量 $m$ の質点の $(x, y)$ 平面内の運動方程式が以下の式で与えられるとする。

$$ma_x = 3m\Omega^2 x + 2m\Omega v_y \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$ma_y = -2m\Omega v_x \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで、 $(v_x, v_y)$  は速度、 $(a_x, a_y)$  は加速度、 $\Omega$  は正の定数である。時間  $t=0$  において  $x=0$ 、 $v_x=v_0$ 、 $y=2v_0/\Omega$ 、 $v_y=0$  とする。以下の設問 (1)～(5) に答えよ。

- (1) 式①に $v_x$ 、式②に $v_y$ を掛けて、辺々加えた式を時間 $t$ に関して積分することにより、エネルギー保存則を導出せよ。
- (2) 式②を時間に関して積分して $v_y$ と $x$ の関係を導け。
- (3) 設問(2)の結果を式①に代入することにより、 $x$ の $t$ に関する2階の微分方程式を導出せよ。
- (4) 設問(3)で求めた微分方程式の一般解は
$$x = a\cos(\Omega t) + b\sin(\Omega t)$$
である。ただし $a$ と $b$ は任意定数である。上記の初期条件の場合に $a$ と $b$ を求めよ。
- (5) 質点の座標 $y$ を時間 $t$ の関数として求めよ。

(次ページに続く)